Санкт-Петербургский государственный университет

МОСЕЕВА Татьяна Дмитриевна

Выпускная квалификационная работа

Случайные сечения выпуклых тел

Уровень образования: бакалавриат
Направление *01.03.01 «Математика»*
Основная образовательная программа *СВ.5000.2016 «Математика»*

Научный руководитель:
Старший научный сотрудник
ПОМИ РАН
Профессор РАН
доктор ф.-м. наук
Запорожец Д. Н.

Рецензент:
Младший научный сотрудник
Лаборатория им. П. Л. Чебышева, СПбГУ
кандидат ф.-м. наук
Петрова Ю. П.

Санкт-Петербург
2020

Оглавление

1. Введение

Рассмотрим $X_0, \ldots, X_l$ — независимые стандартные гауссовские векторы в $\mathbb{R}^d$. Гауссовским симплексом (или гауссовским политопом) будем называть выпуклую оболочку векторов $X_0, \ldots, X_l$ (см., например, [3]).

Нас будет интересовать взвешенный гауссовский симплекс — выпуклая оболочка векторов $\sigma_0 X_0, \ldots, \sigma_l X_l$ для некоторого $l = 1, \ldots, d$, где $\sigma_0, \ldots, \sigma_l$ — положительные вещественные числа.

Одной из целей данной работы является изучение распределения объема взвешенного гауссовского симплекса.

Пусть $\chi_1, \ldots, \chi_d \in \mathbb{R}^1$ — независимые случайные величины, такие, что для каждого $k = 1, \ldots, d$ величина χ_k имеет хи-распределение с k степенями свободы (то есть распределение длины стандартного гауссовского вектора в $\mathbb{R}^k$).

Одним из основных результатов работы является явный вид распределения объема взвешенного гауссовского симплекса.

Теорема 1.1. *Зафиксируем некоторое $l = 1, \ldots, d$. Рассмотрим $X_0, \ldots, X_l$ — независимые стандартные гауссовские векторы. Тогда для любых весов $\sigma_0, \ldots, \sigma_l > 0$*

$$|conv(\sigma_0 X_0, \ldots, \sigma_l X_l)| \stackrel{d}{=} \frac{1}{l!} \sigma_0 \ldots \sigma_l \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \ldots + \frac{1}{\sigma_l^2}} \chi_{d-l+1} \ldots \chi_d. \tag{1.1}$$

В случае, когда $\sigma_0 = \ldots = \sigma_l = 1$, данный результат был получен в [2]. Отметим, что (1.1) из этого результата не следует, так как l-мерный объем при $l < d$ не является аффинно инвариантным.

Известно, что

$$\mathbb{E}\chi_k^p = 2^{p/2} \frac{\Gamma((k+p)/2)}{\Gamma(k/2)}, \tag{1.2}$$

где $\Gamma(t)$ — гамма-функция.

Поэтому в качестве следствия (1.1) можно вычислить моменты объема взвешенного гауссовского симплекса:

$$\mathbb{E}|\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0, \ldots, \sigma_l X_l)|^p = \left[\frac{2^{l/2} \sigma_0 \ldots \sigma_l}{l!} \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \ldots + \frac{1}{\sigma_l^2}} \right]^p \prod_{i=d-l+1}^{d} \frac{\Gamma((i+p)/2)}{\Gamma(i/2)}. \tag{1.3}$$

Формула (1.3) была получена Жульеном Рандон-Фурлингом и Дмитрием Запорожцем в [5].

Другой целью работы является изучение связи между некоторыми случайными величинами, связанными с фиксированным выпуклым телом.

Пусть M – выпуклое тело в $\mathbb{R}^d$ с объемом $\|M\|$ и площадью поверхности $|M|$. Пусть точки P_1 и P_2 выбираются равномерно и независимо в M. Будем обозначать

$F_M^{(\rho)}$ функцию распределения расстояния $\rho\left(P_1, P_2\right)$ между P_1 и P_2:

$$F_M^{(\rho)}(x) = \frac{1}{\|M\|^2} \int_{A_M^x} dP_1 dP_2,$$

где $A_M^x = \left\{P_1, P_2 \mid \rho\left(P_1, P_2\right) < x\right\}$ – множество пар точек $\left(P_1, P_2\right)$, таких, что расстояние между ними меньше x, а dP_i $(i = 1, 2)$ – d-мерная мера Лебега.

Пусть κ_d обозначает объем d-мерного единичного шара, $\omega_d = d\kappa_d$ — площадь поверхности $(d-1)$-мерной единичной сферы в $\mathbb{R}^d$, а $A_{d,k}$ – множество всех k-мерных аффинных подпространств E в $\mathbb{R}^d$ с заданной на нем инвариантной относительно движений мерой Хаара $\mu_{d,k}$, нормированной таким образом, что мера подпространств, пересекающих d-мерный единичный шар $\mathbb{B}^d$, равна κ_{d-k} (см., например, [7, Theorem 13.2.12]):

$$\mu_{d,k}(\left\{E \in A_{d,k} \mid E \cap B^d \neq \emptyset\right\}) = \kappa_{d-k}.$$

Важным для нас частным случем является пространство прямых $A_{d,1}$, которые, во избежание путаницы, мы будем обозначать символом g. Для $g \in A_{d,1}$ обозначим $F_M(y)$ функцию распределения длины хорды $\chi(g) = g \cap M$:

$$F_M(y) = \frac{d\kappa_d}{\kappa_{d-1}} \cdot \frac{1}{|M|} \iint_{B_M^y} \mu_{d,1}(dg),$$

где $B_M^y = \{g \in A_{d,1} \mid g \cap M \neq \emptyset$ и $|\chi(g)| < y\}$ и $|\chi(g)|$ обозначает длину хорды $\chi(g)$.

В [4] была найдена следующая взаимосвязь между моментами распределений $F_M^{(\rho)}$ и F_M:

$$J_k = \frac{d\kappa_d}{(d+k)(d+k+1)} I_{k+d+1}, \tag{1.4}$$

где

$$I_k = \int_{g \cap M \neq \emptyset} |\chi(g)|^k \mu_{d,1}(dg) \quad \text{и} \quad J_k = \int_{P_1, P_2 \in M} \rho^k(P_1, P_2) dP_1 dP_2.$$

Еще одним основным результатом данной работы является усиление (1.4): мы получим следующую явную формулу, выражающую $F_M^{(\rho)}$ через F_M, а в качестве следствия выведем из нее (1.4) (данный результат был опубликован, см. [9]).

Теорема 1.2. *Пусть D обозначает диаметр M. Тогда при $x \in [0, D]$ выполнено*

$$F_M^{(\rho)}(x) = \frac{1}{\|M\|} \left(\frac{\omega_d}{d} \cdot x^d - \frac{|M|}{\|M\|} \frac{\kappa_{d-1}}{d+1} \cdot x^{d+1} + \frac{|M|}{\|M\|} \frac{\kappa_{d-1}}{d} \int\limits_0^x \left(x^d - t^d\right) F_M(t) dt \right). \tag{1.5}$$

Дифференцируя по x, мы незамедлительно получаем формулу для плотности $f_M^{(\rho)}$ функции распределения расстояния $\rho\left(P_1, P_2\right)$.

Следствие 1.1. *Выполнено следующее соотношение:*

$$f_M^{(\rho)}(x) = \frac{1}{\|M\|} \left(\omega_d x^{d-1} - \frac{|M|}{\|M\|} \kappa_{d-1} x^{d-1} \int\limits_0^x (1 - F_M(t))\, dt \right). \tag{1.6}$$

Формулы (1.5) и (1.6) в размерности 2 были получены Арютюнян и Оганяном в [1].

Работа организована следующим образом. Следующая глава посвящена доказательству теоремы 1.1. В главе 3 приводятся некоторые необходимые нам факты из интегральной геометрии (раздел 3.1), доказательство Теоремы 1.2 (раздел 3.2), и (в заключительном разделе) вывод формулы Кингмана (1.4) из Теоремы 1.2.

2. Распределение объема взвешенного гауссовского симплекса

2.1. Вспомогательные утверждения

Следующие утверждения хорошо известны, но для удобства читателя мы приводим их с подробными доказательствами.

Лемма 2.1. *Пусть $Y_1, \ldots, Y_l$ — независимые стандартные гауссовские векторы в $\mathbb{R}^d$, $l \in \{1, \ldots, d\}$. Тогда*

$$|\mathrm{conv}(0, Y_1, \ldots, Y_l)| \stackrel{d}{=} \frac{1}{l!}\chi_{d-l+1} \cdots \chi_d,$$

где χ_i — независимые случайные величины, χ_k имеет χ-распределение с k степенями свободы.

Доказательство. Обозначим за U_k линейную оболочку векторов $Y_k, \ldots, Y_l$. Симплекс $\mathrm{conv}(0, Y_k, \ldots, Y_l)$ обозначим за S_k. Тогда объем S_k мы можем вычислить по формуле «$\frac{1}{dim(S_k)}\times$ высота $\times$ площадь основания». Получаем следующее:

$$|\mathrm{conv}(0, Y_1, \ldots, Y_l)| = |S_1| = \frac{1}{l}\mathrm{dist}(\overline{Y_1}, U_2) \cdot |S_2| =$$
$$= \frac{1}{l \cdot (l-1)}\mathrm{dist}(\overline{Y_1}, U_2) \cdot \mathrm{dist}(\overline{Y_2}, U_3) \cdot |S_3| = \cdots = \frac{1}{l!}\prod_{k=1}^{l-1}\mathrm{dist}(\overline{Y_k}, U_{k+1}) \cdot |\overline{Y_l}|.$$

Заметим, что так как Y_k не зависит от всех последующих, а распределение Y_k сферически инвариантно,

$$\mathrm{dist}(Y_k, U_{k+1}) \stackrel{d}{=} \mathrm{dist}(Y_k, L),$$

где L — фиксированное подпространство размерности $l-k$.

Отметим, что $\mathrm{dist}(Y_k, L) = |Pr_{L^\perp}Y_k|$, где $Pr_{L^\perp}$ — ортогональный проектор на подпространство $L^\perp$ размерности $d-l+k$. Но проекция стандартного гауссовского вектора на подпространство размерности $d-l+k$ имеет в этом подпространстве стандартное гауссовское распределение, а значит, длина этой проекции имеет распределение χ-распределение с $d-l+k$ степенями свободы.

Получаем, что $\prod_{k=1}^{l-1}\mathrm{dist}(Y_k, U_{k+1}) \cdot |Y_l| \stackrel{d}{=} \chi_{d-l+1} \cdots \chi_d$, где χ_i — независимы.

Таким образом,

$$|\mathrm{conv}(0, Y_1, \ldots, Y_l)| = \frac{1}{l!}\prod_{k=1}^{l-1}\mathrm{dist}(\overline{Y_k}, U_{k+1}) \cdot |\overline{Y_l}| \stackrel{d}{=} \frac{1}{l!}\chi_{d-l+1} \cdots \chi_d.$$

□

Лемма 2.2. *Пусть* $\eta_1, \eta_2, \theta_1, \theta_2, \xi_1, \xi_2$ *– положительные с вероятностью 1 случайные величины, такие, что*

$$\eta_1 \cdot \theta_1 = \xi_1,$$
$$\eta_2 \cdot \theta_2 = \xi_2,$$

причем η_i *и* θ_i *независимы для любого* $i \in \{1, 2\}$. *Тогда если* $\theta_1 \stackrel{d}{=} \theta_2$ *и* $\xi_1 \stackrel{d}{=} \xi_2$, *то* $\eta_1 \stackrel{d}{=} \eta_2$.

Доказательство. Прологарифмируем равенства из условия и получим следующее:

$$\log \eta_1 + \log \theta_1 = \log \xi_1,$$
$$\log \eta_2 + \log \theta_2 = \log \xi_2.$$

Величины в левой части каждого из равенств независимы, поэтому характеричтическая функция их суммы есть произведение характеристических функций. Получаем, что

$$\phi_{\log \eta_1}(t) \cdot \phi_{\log \theta_1}(t) = \phi_{\log \xi_1}(t) = \phi_{\log \xi_2}(t) = \phi_{\log \eta_2}(t) \cdot \phi_{\log \theta_2}(t),$$

где во вотором равенстве мы воспользовались тем, что $\xi_1 \stackrel{d}{=} \xi_2$. Пользуясь тем, что $\theta_1 \stackrel{d}{=} \theta_2$, получаем, что $\phi_{\log \eta_1}(t) = \phi_{\log \eta_1}(t)$, откуда следует требуемое утверждение.

□

2.2. Доказательство теоремы 1.1

В первую очередь рассмотрим случай $l = d$.

Параллельно перенесем наш симплекс на вектор $-\sigma_0 X_0$ и получим, что

$$|\text{conv}(\sigma_0 X_0, \dots, \sigma_d X_d)| = |\text{conv}(0, \sigma_1 X_1 - \sigma_0 X_0, \dots, \sigma_d X_d - \sigma_0 X_0)|.$$

Объем полученного симплекса мы считать умеем: нужно посчитать объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\sigma_1 X_1 - \sigma_0 X_0, \dots, \sigma_d X_d - \sigma_0 X_0$ (то есть вычислить определелить соответственной матрицы) и разделить его на $d!$.

Таким образом,

$$|\mathrm{conv}(0, \sigma_1 X_1 - \sigma_0 X_0, \ldots, \sigma_d X_d - \sigma_0 X_0)| =$$
$$= \frac{1}{d!} \det[\sigma_1 X_1 - \sigma_0 X_0, \ldots, \sigma_d X_d - \sigma_0 X_0] =$$

$$= \frac{1}{d!} \det \begin{pmatrix} \sigma_1 X_1^{(1)} - \sigma_0 X_0^{(1)} & \ldots & \sigma_d X_d^{(1)} - \sigma_0 X_0^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1 X_1^{(d)} - \sigma_0 X_0^{(d)} & \ldots & \sigma_d X_d^{(d)} - \sigma_0 X_0^{(d)} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d!} \det \begin{pmatrix} \sigma_1 X_1^{(1)} - \sigma_0 X_0^{(1)} & \ldots & \sigma_1 X_1^{(d)} - \sigma_0 X_0^{(d)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_d X_d^{(1)} - \sigma_0 X_0^{(1)} & \ldots & \sigma_d X_d^{(d)} - \sigma_0 X_0^{(d)} \end{pmatrix},$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем, что определитель матрицы не меняется при транспонировании.

Заметим, что столбцы полученной матрицы — независимые гауссовские векторы. Действительно, все X_k между собой независимы, и координаты каждого из векторов независимы. Зафиксируем k от 1 до d и рассмотрим k-й столбец, обозначим его Y_k. $\mathbb{E}Y_k = 0$. Поймем, как выглядит ковариационная матрица Y_k.

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(Y_k^i, Y_k^j) &= \mathrm{cov}(\sigma_i X_i^{(k)} - \sigma_0 X_0^{(k)}, \sigma_j X_j^{(k)} - \sigma_0 X_0^{(k)}) = \sigma_i \sigma_j \mathrm{cov}(X_i^{(k)}, X_j^{(k)}) - \\ &- \sigma_i \sigma_0 \underbrace{\mathrm{cov}(X_i^{(k)}, X_0^{(k)})}_{=0} - \sigma_j \sigma_0 \underbrace{\mathrm{cov}(X_0^{(k)}, X_j^{(k)})}_{=0} + \sigma_0^2 \mathrm{cov}(X_0^{(k)}, X_0^{(k)}) = \\ &= \sigma_i \sigma_j \mathrm{cov}(X_i^{(k)}, X_j^{(k)}) + \sigma_0^2 = \sigma_i \sigma_j \delta_{ij} + \sigma_0^2, \end{aligned}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Таким образом, матрица ковариации Y_k выглядит следующим образом:

$$\mathrm{cov}(Y_k) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + \sigma_0^2 & \sigma_0^2 & \ldots & \sigma_0^2 \\ \sigma_0^2 & \sigma_2^2 + \sigma_0^2 & \ldots & \sigma_0^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_0^2 & \sigma_0^2 & \ldots & \sigma_d^2 + \sigma_0^2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что ковариационная матрица Y_k не зависит от k, обозначим эту матрицу M. Тогда мы можем сказать, что $Y_k = A\overline{X_k}$, где $\overline{X_k}$ – независимые стандартные гауссовские векторы, а матрица A такова, что $AA^{\mathrm{T}} = M$.

Получаем, что

$$|\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0, \ldots, \sigma_d X_d)| = \frac{1}{d!}\det[A\overline{X_1}, \ldots, A\overline{X_d}] = \frac{1}{d!}\det A \det[\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_d}]. \tag{2.1}$$

Сперва вычислим определитель A. Ввиду того, что $AA^{\mathrm{T}} = M$, получаем, что $\det A = (\det M)^{\frac{1}{2}}$. Осталось вычислить определитель матрицы M.

$$\det M = \det\left(\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & \sigma_d^2\end{pmatrix} + \sigma_0^2 \cdot I\right) =$$

$$= \sigma_1^2 \ldots \sigma_d^2 + \sum_{k=1}^{d} \frac{\sigma_1^2 \ldots \sigma_d^2}{\sigma_k^2} \cdot \sigma_0^2 = \sigma_0^2\sigma_1^2 \ldots \sigma_d^2 \sum_{k=0}^{d} \frac{1}{\sigma_k^2}.$$

Значит, $\det A = \sqrt{\det M} = \sigma_0 \ldots \sigma_d \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \ldots + \frac{1}{\sigma_d^2}}$.

Осталось понять, как распределен $\det[\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_d}]$, то есть объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_d}$, обозначим его за P.

$$|P| = d! \cdot |\mathrm{conv}(0, \overline{X_1}, \ldots, \overline{X_d})|.$$

В силу Леммы 2.1, $|\mathrm{conv}(0, \overline{X_1}, \ldots, \overline{X_d})| \overset{d}{=} \frac{1}{d!}\chi_1 \ldots \chi_d$, следовательно

$$\det[\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_d}] \overset{d}{=} \chi_1 \ldots \chi_d.$$

Подставляя полученный результат в (2.1), получаем, что

$$|\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0, \ldots, \sigma_d X_d)| \overset{d}{=} \frac{1}{d!}\sigma_0 \ldots \sigma_d \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \ldots + \frac{1}{\sigma_d^2}}\chi_1 \ldots \chi_d, \tag{2.2}$$

где величины $\chi_1, \ldots, \chi_d$ — независимы.

Перейдем к рассмотрению случая $l < d$.

Рассмотрим пространство

$$V_l = \mathrm{aff}(\sigma_0 X_0, \ldots, \sigma_l X_l).$$

С вероятностью, равной 1, V_l — пространство размерности l. Обозначим за O_{V_l} ортогональную проекцию начала координат на V_l. Рассмотрим пространство

$$W_l = V_l - O_{V_l}.$$

В силу сферической инвариантности X_i и их независимости, линейное пространство W_l будет равномерно распределено на линейном l-мерном Грассманиане относительно заданной на нем меры Хаара. Заметим также, что W_l не зависит от $|\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0, \ldots, \sigma_l X_l)|$.

Рассмотрим проекцию на первые l координат — P_l, пусть P_l^W — ее ограничение на

W_l. Тогда

$$\begin{aligned}|\mathrm{conv}(\sigma_0 P_l X_0, \dots, \sigma_l P_l X_l)| &= |\mathrm{conv}(\sigma_0 P_l X_0 - P_l O_{V_l}, \dots, \sigma_l P_l X_l - P_l O_{V_l})| = \\ &= |\mathrm{conv}(P_l^W(\sigma_0 X_0 - O_{V_l}), \dots, P_l^W(\sigma_0 X_0 - O_{V_l})| = \\ &= |\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0 - O_{V_l}, \dots, \sigma_l X_l - O_{V_l})| \cdot |\det(P_l^W)| = \\ &= |\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0, \dots, \sigma_l X_l)| \cdot |\det(P_l^W)|.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь в третьем равенстве мы воспользовались известным утверждением о том, как меняется объем при линейных преобразованиях (см., например, [8], теорема 1.1.4).

Как отмечалось в разделе 3.1, ортогональная проекция стандартного гауссовского вектора на подпространство размерности l имееет в этом пространстве стандартное гауссовское распределение, отсюда, используя (2.2), получаем следующее:

$$|\mathrm{conv}(\sigma_0 P_l X_0, \dots, \sigma_l P_l X_l)| \stackrel{d}{=} \frac{1}{l!}\sigma_0 \dots \sigma_l \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \dots + \frac{1}{\sigma_l^2}}\chi_1 \dots \chi_l, \tag{2.4}$$

где $\chi_1, \dots, \chi_l$ — независимые случайные величины, и для каждого $i = 1, \dots, l$ величина χ_i имеет χ-распределение с i степенями свободы.

Таким образом,

$$|\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0, \dots, \sigma_l X_l)| \cdot |\det(P_l^W)| \stackrel{d}{=} \frac{1}{l!}\sigma_0 \dots \sigma_l \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \dots + \frac{1}{\sigma_l^2}}\chi_1 \dots \chi_l, \tag{2.5}$$

причем величины $|\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0, \dots, \sigma_l X_l)|$ и $|\det(P_l^W)|$ независимы.

Рассмотрим пространство $W = \mathrm{lin}(0, Y_1, \dots, Y_l)$, где Y_i — независимые стандартные гауссовские векторы в $\mathbb{R}^d$. С вероятностью, равной 1, W — l-мерное линейное пространтсво. В силу независимости и сферической инвариантности Y_i, W будет равномерно распределенное на линейном l-мерном Грассманиане.

Тогда

$$|\mathrm{conv}(0, Y_1, \dots, Y_l) \cdot |\det(P_l^W)| = |\mathrm{conv}(0, P_l Y_1, \dots, P_l Y_l)|,$$

где $|\det(P_l^W)|$ не зависит от $|\mathrm{conv}(0, Y_1, \dots, Y_l)|$.

В силу Леммы 2.1,

$$|\mathrm{conv}(0, Y_1, \dots, Y_l)| \stackrel{d}{=} \frac{1}{l!}\chi_{d-l+1} \dots \chi_d,$$

где величины χ_i независимы.

Аналогично, пользуясь тем, что $P_l Y_i$ — независимые стандартные гауссовские векторы в $\mathbb{R}^l$, получаем, что

$$|\mathrm{conv}(0, P_l Y_1, \dots, P_l Y_l)| \stackrel{d}{=} \frac{1}{l!}\chi_1 \dots \chi_l.$$

Комбинируя последние три равенства, имеем:

$$\frac{1}{l!}\chi_{d-l+1} \dots \chi_d \cdot |\det(P_l^W)| \stackrel{d}{=} \frac{1}{l!}\chi_1 \dots \chi_l. \tag{2.6}$$

Домножим (2.6) на $\sigma_0 \dots \sigma_l \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \dots + \frac{1}{\sigma_l^2}}$ и получим следующее равенство по распределению:

$$\frac{1}{l!}\sigma_0 \dots \sigma_l \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \dots + \frac{1}{\sigma_l^2}}\chi_{d-l+1} \dots \chi_d \cdot |\det(P_l^W)| \stackrel{d}{=} \frac{1}{l!}\sigma_0 \dots \sigma_l \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \dots + \frac{1}{\sigma_l^2}}\chi_1 \dots \chi_l. \tag{2.7}$$

Применяя Лемму 2.2 к равенствам (2.4) и (2.7), получим, что

$$|\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0, \dots, \sigma_l X_l)| \stackrel{d}{=} \frac{1}{l!}\sigma_0 \dots \sigma_l \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \dots + \frac{1}{\sigma_l^2}}\, \chi_{d-l+1} \dots \chi_d.$$

Теорема 1.1 доказана.

3. Случайные сечения выпуклых тел

3.1. Предварительные сведения

В данной главе мы будем пользоваться следующим известным результатом (см. [7, Theorem 7.2.7]):

Утверждение 3.1 (Аффинная формула Бляшке-Петканчина)**.** *Пусть* $k \in \{1, ..., d\}$ *и* $f : (\mathbb{R}^d)^{k+1} \to \mathbb{R}$ *– неотрицательная измеримая функция. Тогда*

$$\int\limits_{(\mathbb{R}^d)^{k+1}} f(x_0, \dots, x_k) dx_0 \dots dx_k =$$

$$= (k!)^{d-k} b_{d,k} \int\limits_{A_{d,k}} \int\limits_{E^{k+1}} f(x_0, \dots, x_k) |\mathrm{conv}(x_0, \dots, x_k)|^{d-k} \lambda_E(dx_0) \dots \lambda_E(dx_k) \mu_{d,k}(dE),$$

где $b_{d,k} = \frac{\omega_{d-k+1} \cdots \omega_d}{\omega_1 \cdots \omega_k}$ *и* λ_E *обозначает меру Лебега в подпространстве* E*.*

Следующее утверждение хорошо известно (см., например, [6]), одноко в связи с тем, что оно является почти прямым следствием формулы Бляшке–Петканчина, мы приводим его с доказательством.

Утверждение 3.2. *Пусть* M *- выпуклое тело в* $\mathbb{R}^d$*, тогда*

$$\int\limits_{g \cap M \neq \emptyset} |\chi(g)|^{d+1} \mu_{d,1}(dg) = \frac{d(d+1)}{\omega_d} \|M\|^2. \tag{3.1}$$

Доказательство. Применив формулу Бляшке-Петканчина в случае $k = 1$ и $f(x_0, x_1) = \mathbb{1}_M(x_0) \mathbb{1}_M(x_1)$, получим следующее:

$$\int\limits_{M^2} dx_0 dx_1 = b_{d,1} \int\limits_{g \cap M \neq \emptyset} \int\limits_0^{|\chi(g)|} \int\limits_0^{|\chi(g)|} |x_0 - x_1|^{d-1} dx_0 dx_1 \mu_{d,1}(dg).$$

Воспользовавшись равенством

$$\int\limits_0^s \int\limits_0^s |x_0 - x_1|^{d-1} dx_0 dx_1 = \frac{2}{d(d+1)} s^{d+1},$$

получаем

$$\|M\|^2 = \int\limits_{M^2} dx_0 dx_1 = \frac{\omega_d}{2} \frac{2}{d(d+1)} \int\limits_{g \cap M \neq, \emptyset} |\chi(g)|^{d+1} \mu_{d,1}(dg).$$

□

3.2. Доказательство Теоремы 1.2

Легко понять, что $F_M^{(\rho)}(x) = 0$ при $x < 0$ и $F_M^{(\rho)}(x) = 1$ при $x \geqslant D$. Поэтому дальше мы будем работать с $x \in [0, D]$.

Вместо требуемого нам интеграла $\int_{\rho(P_1,P_2)<x} dP_1 dP_2$ мы будем работать с интегралом $\int_{\rho(P_1,P_2)\geqslant x} dP_1 dP_2$, то есть рассмотрим

$$1 - F_M^{(\rho)}(x) = \frac{1}{\|M\|^2} \int_{\rho(P_1,P_2)\geqslant x} dP_1 dP_2. \tag{3.2}$$

Воспользуемся Утверждением 3.1 и перейдем от переменных (P_1, P_2) к новым переменным (g, t_1, t_2), где g – элемент $A_{d,1}$ – прямая, проходящая через P_1 и P_2, а t_1 и t_2 – координаты точек P_1 и P_2 на этой прямой. Таким образом получаем:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\rho(P_1,P_2)\geqslant x} dP_1 dP_2 &= b_{d,1} \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} \mu_{d,1}(dg) \int\limits_{|t_1-t_2|\geqslant x} |t_1 - t_2|^{d-1} dt_1 dt_2 \\ &= \frac{\omega_d}{2} \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} \mu_{d,1}(dg) \int\limits_{|t_1-t_2|\geqslant x} |t_1 - t_2|^{d-1} dt_1 dt_2.\end{aligned}$$

В силу симметрии, можно рассматривать только случай $t_1 \geqslant t_2$:

$$\begin{aligned}&\frac{\omega_d}{2} \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} \mu_{d,1}(dg) \int\limits_{|t_1-t_2|\geqslant x} |t_1 - t_2|^{d-1} dt_1 dt_2 \\ &\quad= \omega_d \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} \mu_{d,1}(dg) \int\limits_{(t_1-t_2)\geqslant x} (t_1 - t_2)^{d-1} dt_1 dt_2 \\ &\quad= \omega_d \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} \mu_{d,1}(dg) \int\limits_{x}^{|\chi(g)|} \frac{{t_1}^d - x^d}{d} dt_1 \\ &\quad= \omega_d \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} \left(\frac{|\chi(g)|^{d+1} - x^{d+1}}{d(d+1)} - \frac{x^d}{d} \left(|\chi(g)| - x\right) \right) \mu_{d,1}(dg) \\ &\quad= \frac{\omega_d}{d(d+1)} \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} |\chi(g)|^{d+1} \mu_{d,1}(dg) \; - \; \frac{\omega_d}{d} x^d \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} |\chi(g)| \, \mu_{d,1}(dg) \\ &\quad+ \; x^{d+1} \left(\frac{\omega_d}{d} - \frac{\omega_d}{d(d+1)} \right) \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} \mu_{d,1}(dg) = \frac{\omega_d}{d(d+1)} \Big(I_1 - (d+1) x^d I_2 + d x^{d+1} I_3 \Big).\end{aligned} \tag{3.3}$$

По определению,

$$I_3 = \frac{\kappa_{d-1} |M|}{d \kappa_d} \left(1 - F_M(x)\right).$$

Чтобы найти значения I_1 и I_2, воспользуемся следующей леммой (см. [1]):

Лемма. *Пусть* $R : [0, D] \to \mathbb{R}$ *– непрерывная функция. Тогда*

$$\int_{|\chi(g)|<x} R\left(|\chi(g)|\right) \mu_{d,1}(dg) = \frac{\kappa_{d-1}|M|}{d\kappa_d} \int_0^x R(t) dF_M(t). \tag{3.4}$$

Воспользовавшись данной леммой вместе с Утверждением 2, получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} |\chi(g)|^{d+1}\mu_{d,1}(dg) = \int\limits_{g\cap M\neq\emptyset} |\chi(g)|^{d+1}\mu_{d,1}(dg) - \int\limits_{|\chi(g)|<x} |\chi(g)|^{d+1}\mu_{d,1}(dg) \\ &= \frac{d(d+1)}{\omega_d}\|M\|^2 - \frac{\kappa_{d-1}|M|}{d\kappa_d}\int\limits_0^x t^{d+1}dF_M(t) \qquad (3.5) \\ &= \frac{d(d+1)}{\omega_d}\|M\|^2 - \frac{\kappa_{d-1}|M|}{d\kappa_d}\left(x^{d+1}F_M(x) - (d+1)\int\limits_0^x t^d F_M(t)dt\right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_{|\chi(g)|\geqslant x} |\chi(g)|\,\mu_{d,1}(dg) = \int\limits_{g\cap M\neq\emptyset} |\chi(g)|\,\mu_{d,1}(dg) \; - \int\limits_{|\chi(g)<x} |\chi(g)|\,\mu_{d,1}(dg) \\ &= \|M\| \; - \frac{\kappa_{d-1}|M|}{d\kappa_d}\int\limits_0^x t dF_M(t) = \|M\| - \frac{\kappa_{d-1}|M|}{d\kappa_d}\left(xF_M(x) - \int\limits_0^x F_M(t)dt\right). \qquad (3.6) \end{aligned}$$

Подставляя (3.5) и (3.6) в (3.3), получаем:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\rho(P_1,P_2)\geqslant x} dP_1dP_2 = \frac{\omega_d}{d(d+1)}\Big(&\frac{d(d+1)}{\omega_d}\|M\|^2 - \frac{\kappa_{d-1}|M|}{d\kappa_d}\left(x^{d+1}F_M(x) - (d+1)\int\limits_0^x t^d F_M(t)dt\right) \\ &- (d+1)x^d\left(\|M\| - \frac{\kappa_{d-1}|M|}{d\kappa_d}\left(xF_M(x) - \int\limits_0^x F_M(t)dt\right)\right) \\ &+ dx^{d+1}\frac{\kappa_{d-1}|M|}{d\kappa_d}\left(1 - F_M(x)\right)\Big) \\ = \frac{\omega_d}{d(d+1)}&\left(\frac{d(d+1)}{\omega_d}\|M\|^2 + \frac{\kappa_{d-1}|M|}{d\kappa_d}(d+1)\int\limits_0^x \left(t^d - x^d\right)F_M(t)dt\right. \\ &\left. -(d+1)x^d\|M\| + dx^{d+1}\frac{\kappa_{d-1}|M|}{d\kappa_d}\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
F_M^{(\rho)}(x) &= 1 - \frac{1}{\|M\|^2} \int\limits_{\rho(P_1,P_2)\geqslant x} dP_1 dP_2 \\
&= \frac{|M|}{\|M\|^2}\frac{\kappa_{d-1}}{d}\int\limits_0^x \left(x^d - t^d\right) F_M(t)dt + \frac{1}{\|M\|}\frac{\omega_d}{d}x^d - \frac{|M|}{\|M\|^2}\frac{\kappa_{d-1}}{d+1}x^{d+1} \\
&= \frac{1}{\|M\|}\left(\frac{\omega_d}{d}\cdot x^d - \frac{|M|}{\|M\|}\frac{\kappa_{d-1}}{d+1}\cdot x^{d+1} + \frac{|M|}{\|M\|}\frac{\kappa_{d-1}}{d}\int\limits_0^x \left(x^d - t^d\right) F_M(t)dt\right).
\end{aligned}
$$

3.3. Моменты расстояния между точками в области

Благодаря формуле (1.6), мы можем посчитать k-й момент расстояния между 2 точками, равномерно и независимо выбранными внутри выпуклого тела. Для этого нужно вычислить следующий интеграл:

$$
M_K^\rho = \int\limits_0^D x^k f_M^\rho(x)dx.
$$

Подставляя в последнее выражение (1.6), получаем следующее:

$$
\begin{aligned}
M_K^\rho &= \int\limits_0^D x^k f_M^\rho(x)dx \\
&= \frac{\omega_d}{\|M\|}\int\limits_0^D x^{k+d-1}dx - \frac{\kappa_{d-1}|M|}{\|M\|^2}\int\limits_0^D \left(x^{k+d-1}\int\limits_0^x (1-F_M(t))dt\right)dx \\
&= \frac{\omega_d}{\|M\|}\frac{D^{k+d}}{k+d} - \frac{\kappa_{d-1}|M|}{\|M\|^2(k+d)}\int\limits_0^D\int\limits_0^x \left(1-F_M(t)\right)dtdx^{k+d} \qquad (3.7)\\
&= \frac{\omega_d}{\|M\|}\frac{D^{k+d}}{k+d} - \frac{\kappa_{d-1}|M|}{\|M\|^2(k+d)}\left[D^{k+d}\int\limits_0^D \left(1-F_M(t)\right)dt - \int\limits_0^D x^{k+d}\left(1-F_M(x)\right)dx\right].
\end{aligned}
$$

Чтобы вычислить интеграл $\int_0^D \left(1-F_M(t)\right)dt$, воспользуемся (3.4), подставив $x = D$ и $R(t) = t$. Получаем:

$$
\begin{aligned}
\|M\| = \int_{\chi(x)<D} |\chi(g)|\mu_{d,1}(dg) &= \frac{\kappa_{d-1}|M|}{d\kappa_d}\int\limits_0^D t dF_M(t) = -\frac{\kappa_{d-1}|M|}{d\kappa_d}\int\limits_0^D t\, d\left(1-F_M(t)\right) \\
= -\frac{\kappa_{d-1}|M|}{d\kappa_d}\left(d\left(1-F_M(D)\right) - \int\limits_0^D \left(1-F_M(t)\right)dt\right) &= \frac{\kappa_{d-1}|M|}{d\kappa_d}\int\limits_0^D \left(1-F_M(t)\right)dt,
\end{aligned}
$$

где последнее равенство выполнено в силу того, что $F_M(D) = 1$. Таким образом,

$$M_K^\rho = \frac{\omega_d}{\|M\|}\frac{D^{k+d}}{k+d} - \frac{\kappa_{d-1}|M|}{\|M\|^2(k+d)}\left[D^{k+d}\frac{d\kappa_d\|M\|}{\kappa_{d-1}|M|} - \int\limits_0^D x^{k+d}\left(1 - F_M(x)\right)dx\right]$$
$$= \frac{\kappa_{d-1}|M|}{(k+d)\|M\|^2}\int\limits_0^D x^{k+d}\left(1 - F_M(x)\right)dx. \tag{3.8}$$

Заметим, что равентство (3.8) позволяет понять, как соотносятся моменты расстояния между точками и длины случайной хорды.

Действительно, если M_k – k-й момент длины хорды, то

$$M_k = \int\limits_0^D x^k dF_M(x) = D^k \underbrace{F_M(D)}_{=1} - k\int\limits_0^D x^{k-1}F_M(x)dx$$
$$= k\left(\int\limits_0^D x^{k-1}dx - \int\limits_0^D x^{k-1}F_M(x)dx\right) = k\int\limits_0^D x^{k-1}\left(1 - F_M(x)\right)dx. \tag{3.9}$$

Подставляя (3.9) в (3.8), получаем

$$M_k^\rho = \frac{\kappa_{d-1}|M|}{(k+d)(k+d+1)\|M\|^2}M_{k+d+1}. \tag{3.10}$$

Напомним, что I_k и J_k определены следующим образом:

$$I_k = \int_{g\cap M\neq\emptyset}|\chi(g)|^k\mu_{d,1}(dg) \quad \text{и} \quad J_k = \int_{P_1,P_2\in M}\rho^k(P_1,P_2)dP_1dP_2.$$

Подставляя $R(t) = t^k$ и $x = D$ в (3.4), получаем

$$I_k = \frac{\kappa_{d-1}|M|}{d\kappa_d}\int\limits_0^D x^k dF_M(x) = \frac{\kappa_{d-1}|M|}{d\kappa_d}M_k. \tag{3.11}$$

Для вычисления интеграла J_k докажем следующую лемму, аналогичную Лемме 3.2:

Лемма. *Пусть $H(x) : [0, D] \to \mathbb{R}$ – непрерывная на $[0, D]$ функция. Тогда для любого $x \in [0, D]$ выполнено*

$$\int_{\rho(P_1,P_2)<x}H(\rho(P_1,P_2))dP_1dP_2 = \|M\|^2\int\limits_0^x H(t)dF_M^\rho(x).$$

Доказательство. Рассмотрим $G(x) = \int_{\rho(P_1,P_2)<x} H(\rho(P_1,P_2))dP_1dP_2$. Тогда

$$\frac{G(x+\Delta x) - G(x)}{\Delta x} = \int\limits_{x\leqslant\rho(P_1,P_2)<x+\Delta x} \frac{H(\rho(P_1,P_2))dP_1dP_2}{\Delta x} =$$
$$= \|M\|^2 H(\theta) \frac{F_M^\rho(x+\Delta x) - F_M^\rho(x)}{\Delta x}$$

для некоторого $\theta \in [x, x+\Delta x]$. Устремим Δx к 0. Тогда, так как H непрерывна, а F_M^ρ – почти всюду дифференцируема, получаем

$$dG(x) = \|M\|^2 H(x) dF_M^\rho(x).$$

Тогда, так как $G(0) = 0$, получаем $G(x) = \|M\|^2 \int_0^x H(t)dF_M^\rho(x)$, что и требовалось.

□

Таким образом,

$$J_k = \int_{\rho(P_1,P_2)<D} \rho^k(P_1,P_2)dP_1dP_2 = \|M\|^2 \int\limits_0^D x^k dF_M^\rho(x) = \|M\|^2 M_\rho^k. \tag{3.12}$$

Подставляя (3.3) и (3.12) в (3.10), получаем

$$J_k = \frac{d\kappa_d}{(d+k)(d+k+1)} I_{k+d+1}. \tag{3.13}$$

Список литературы

[1] N. Aharonyan and V. Ohanyan. Moments of the distance between two random points. *Model. Artif. Intell.*, 10(2):64–70, 2016.

[2] J. Grote, Z. Kabluchko, and Ch. Thäle. Limit theorems for random simplices in high dimensions. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 16(1):141–177, 2019.

[3] Z. Kabluchko and D. Zaporozhets. Expected volumes of gaussian polytopes, external angles, and multiple order statistics. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 372(3):1709 – 1733, 2019.

[4] J. F. C. Kingman. Random secants of a convex body. *J. Appl. Probab.*, 6(3):660–672, 1969.

[5] J. Randon-Furling and D. Zaporozhets. Convex hulls of several multidimensional gaussian random walks. *Work in progress.*

[6] L. Santaló. *Integral Geometry and Geometric Probability.* Addison-Wesley Publishing Company, 1976.

[7] R. Schneider and W. Weil. *Stochastic and integral geometry.* Springer–Verlag, 2008.

[8] Л.Д. Иванов. *Вариации множеств и функций.* Наука, 1975.

[9] Т. Мосеева. Случайные сечения выпуклых тел. *Зап. научн. семин. ПОМИ*, 486:190–199, 2019.